

Численное интегрирование

Квадратурные формулы

Квадратура

Квадратура

- (1) Число квадратных единиц в площади фигуры
- (2) Вычисление площади или интеграла
- (3) Построение квадрата, равновеликого данной фигуре

Квадратура круга – задача превращения круга в равновеликий квадрат

Квадрат

- (1) Равносторонний прямоугольник
- (2) Возведение во вторую степень; результат умножения на себя

лат. *quadratus* – четырехугольный

quadratum – делать четырехугольным

quarta - четверть

quattuor – четыре

квартет, квартал, квартира, карьер

Интегрирование

- Для определения площади, объема, работы
- Вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

- Точное аналитическое решение
- F – первообразная

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Пример

- Задача: найти интеграл

$$I = \int_a^b c dx$$

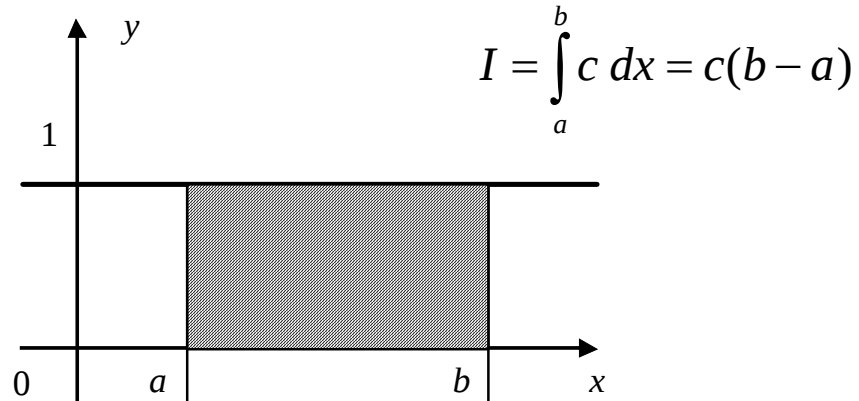
- Аналитическое решение

$$F(x) = cx$$

$$I = \int_a^b c dx = c(b - a)$$

Геометрический смысл

- Геометрический смысл интеграла:
площадь под графиком



Задача

Найти значение интеграла аналитически

$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx$$

Аналитическое решение

$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^{24} = 24^3 - 0^3 = 13824$$

Проблемы

- Высокая трудоемкость получения первообразной
- Вычисления интеграла через первообразную приводят к громоздким и приближенным вычислениям
- Не всегда можно получить аналитическое выражение для первообразной
- Исходные данные могут быть неточными
- Для практического использования достаточно получить приближенное решение

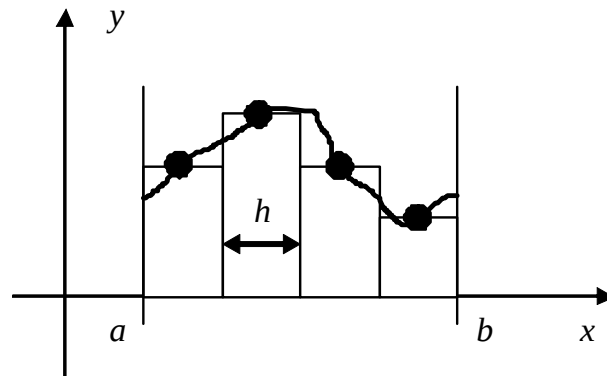
Квадратурные формулы

- Численное интегрирование
- Приближенное вычисление интеграла
- Значения функции $f(x)$ в нескольких узловых точках (узлах)
- Наиболее трудоемкая операция - вычисление значений функции
- Независимые операции
- Возможность распараллеливания

Метод прямоугольников

Метод прямоугольников

- Площадь фигуры $\approx$ сумме площадей прямоугольников



- Формула?

Метод прямоугольников

- Центральные прямоугольники
 - Высота прямоугольника равна значению функции в центре интервала

$$I = h(f(a + h/2) + f(a + h/2 + h) + \\ + f(a + h/2 + 2h) + \dots)$$

- Длина каждого интервала

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Задача

Найти значение интеграла численно:
методом прямоугольников
($n = 2, 3, 4$)

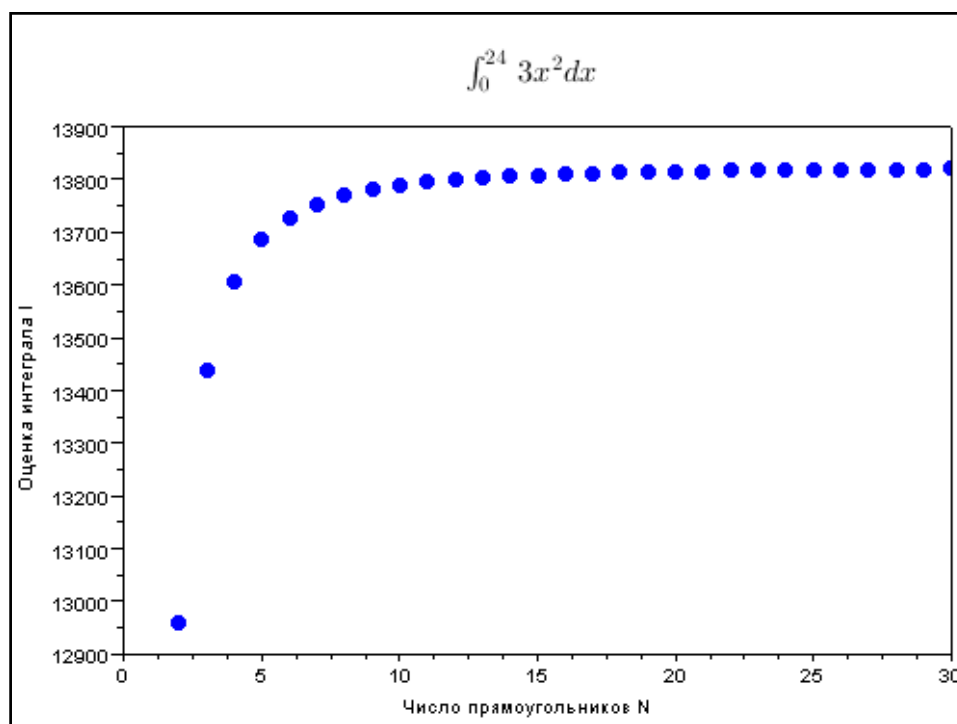
$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx$$

Программа SciLab

```
a=0;
b=24;
I=[];
for n=2:30
h=(b-a)/n;
x=(a+h/2):h:(b-h/2);
f=3*x.^2;
I(n)=h*sum(f);
end
n=2:30;
plot(n,I(n),'.')
Integral='$\textstyle\int_{0}^{24} 3x^2 dx$';
xtitle(Integral,"Число прямоугольников
N","Оценка интеграла I")
```

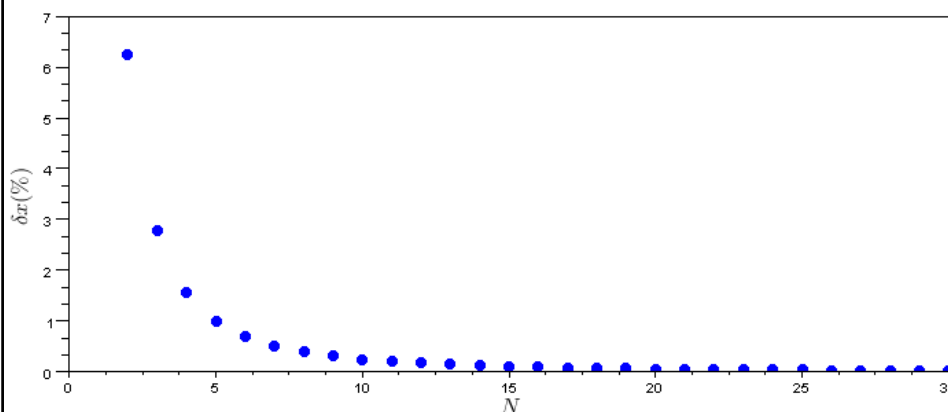
Результаты SciLab

```
-->[n' I(n)]  
  2.    12960.  
  3.    13440.  
  4.    13608.  
  5.    13685.76  
  ...  
  
 27.    13819.259  
 28.    13819.592  
 29.    13819.891  
 30.    13820.16
```



Относительная погрешность

```
dx=abs((I(n)-13824)/13824*100);  
plot(n,dx,'.')  
xtitle(Integral,"$N$", "$\delta x$ (\%)$")
```

$$\int_0^{24} 3x^2 dx$$


Задача

Найти значение интеграла в MS Excel:
 $n = 100$

$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx$$

Excel

- Переключение отображения формул и результатов [Ctrl+`]
- Переключение стиля ссылок R1C1 / A1
 - Сервис ► Параметры ► Общие ► Стиль ссылок

4	x
5	=R[-3]C[1]+R[-3]C[3]/
6	=R[-1]C+R[-4]C[3]
7	Параметры
8	Международные Сохранение Проверка
9	Вид Вычисления Правка Общие
10	Параметры
	☒ Стиль ссылок R1C1
	☐ Игнорировать DDE-запросы от других приложений

	A	B	C	D
1	n	a	b	h
2	100	0	24	=(C2-B2)/A2
3				
4	x	f(x)		
5	=B2+D2/2	=3*A5^2		
6	=A5+D\$2	=3*A6^2		
103	=A102+D\$2	=3*A103^2		
104	=A103+D\$2	=3*A104^2		
105	sum=	=СУММ(B5:B104)		
106	int=	=B105*D2		

	A	B	C	D
1	n	a	b	h
2	100	0	24	0,24
3				
4	x	f(x)		
5	0,12	0,0432		
6	0,36	0,3888		
103	23,64	1676,549		
104	23,88	1710,763		
105	sum=	57598,56		
106	int=	13823,65		

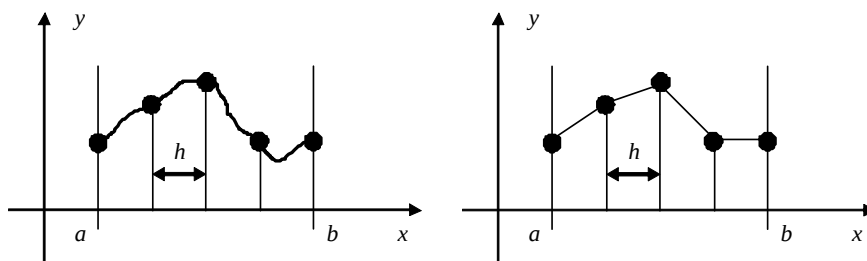
Ошибка

- Заниженная оценка в методе прямоугольников для площади под параболой
- [График](#)

Метод трапеций

Метод трапеций

- Площадь фигуры $\approx$ сумме площадей трапеций



- Формула?

Метод трапеций

- Площадь трапеции
 - Произведение полусуммы оснований на высоту

$$S = h \frac{f(a) + f(a+h)}{2}$$

- Длина каждого интервала

$$I = h \left[\frac{f_0 + f_{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^n f_i \right]$$

Задача

Найти значение интеграла численно:
методом трапеций
($n = 2, 3, 4$)

$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx$$

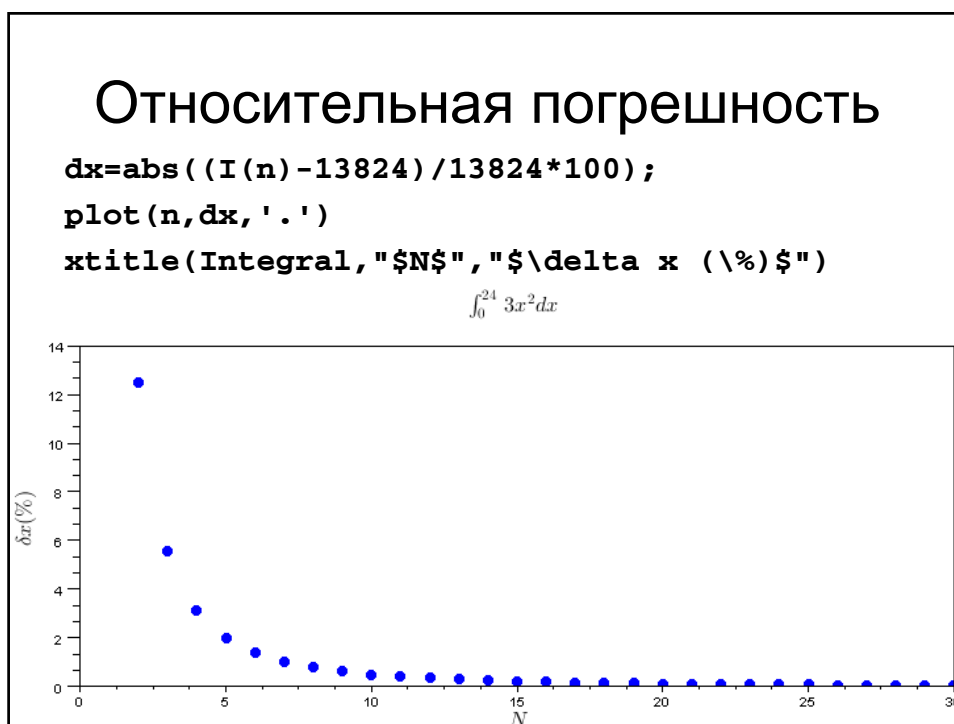
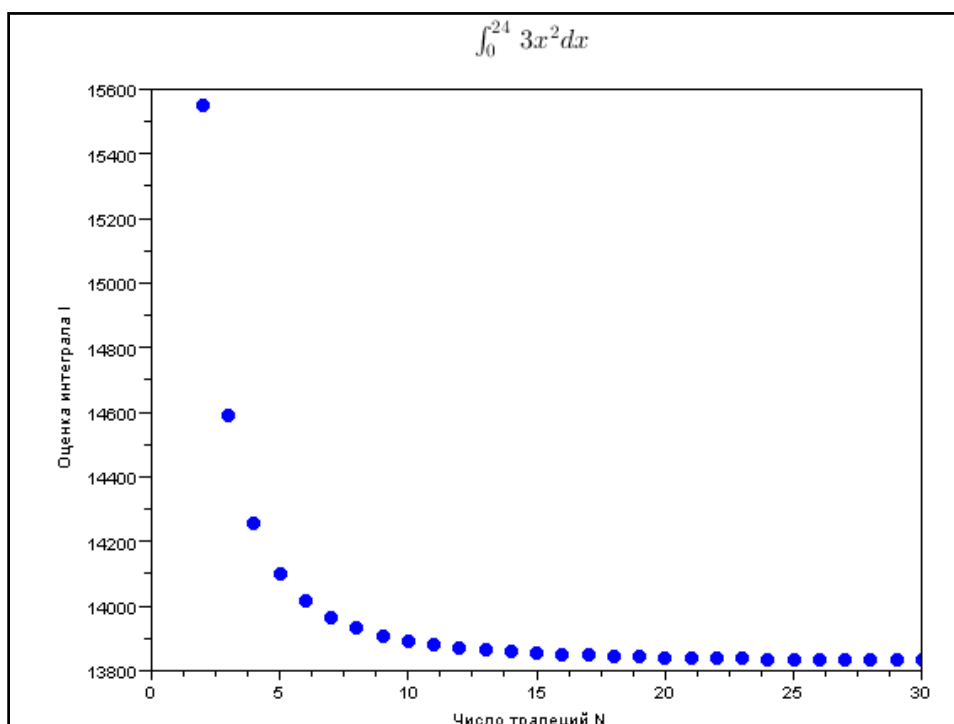
Программа SciLab

```
a=0;
b=24;
I=[];
for n=2:30
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
f=3*x.^2;
I(n)=h*(f(1)/2+sum(f(2:n))+f(n+1)/2);
end
n=2:30;
plot(n,I(n),'.')
Integral='$\textstyle\int_{0}^{24}3x^2dx$';
xtitle(Integral,"Число трапеций N","Оценка
интеграла I")
```

Результаты SciLab

```
-->[n' I(n)]
2.      15552.
3.      14592.
4.      14256.
...

27.     13833.481
28.     13832.816
29.     13832.219
30.     13831.68
```



Ошибка

- Завышенная оценка в методе трапеций для площади под параболой
- График

Другие методы интегрирования

Уравнение	Порядок	Фигура
$f(x) = a$	0	Прямоугольник (константа)
$f(x) = a + b x$	1	Трапеция (прямая)
$f(x) = a + b x + c x^2$	2	Парабола