

Численная оптимизация

Оптимизация

- Поиск наилучшего решения

Оптимизм

- (1) Философское воззрение, считающее, что развитие жизни идет по пути совершенствования
 - Учение Лейбница: «наш мир – лучший из возможных миров»
- (2) Бодрое, жизнерадостное мироощущение; склонность видеть во всем лучшие стороны, надежда на лучшее

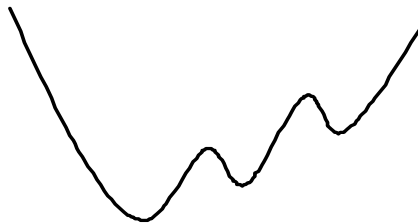
лат. *optimum, optimus* – лучший

Наилучшее

- Оптимизация – поиск наилучшего варианта по какому-либо правилу (критерию)
- Критерий $f(x)$ – целевая функция
- Поиск минимума или максимума целевой функции

Виды минимумов

- **Локальный минимум** – на интервале значений x
- **Глобальный минимум** – на всем множестве значений x (наименьший из локальных)
 - Укажите на графике локальные и глобальные минимумы и максимумы



Аналитическое решение

- В точке минимума (максимума) первая производная равна нулю

$$f(x) \rightarrow \max$$

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Задача

- Найти минимум функции аналитическим методом

$$y = x^2 - 5x$$

Аналитическое решение

- Производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x) = 2x - 5$$

- Минимум функции

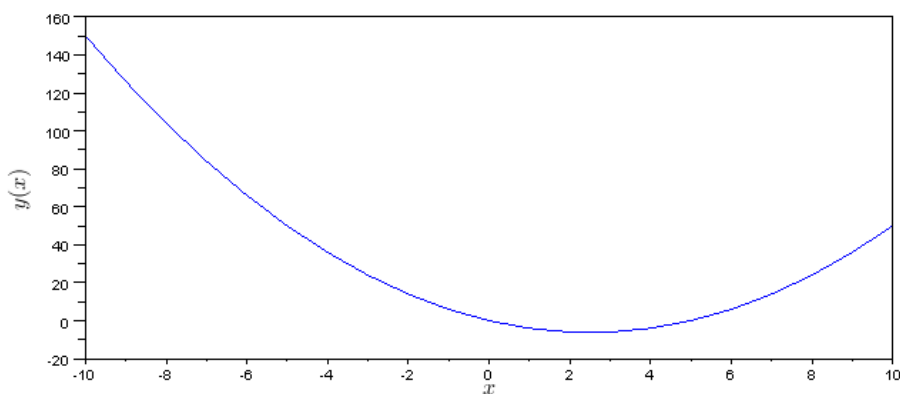
$$y' = 2x - 5 = 0$$

$$x = 2,5$$

График функции

```
x=-10:10;  
y=x.^2-5*x;  
plot(x,y)  
xlabel('$y(x)=x^2-5x$', '$x$', '$y(x)$')
```

$$y(x) = x^2 - 5x$$



Пассивный поиск

Пассивный поиск

- Метод пассивного поиска
- Полный перебор вариантов
 - Вычислить значения функции во всех пробных точках
 - Выбрать наилучшую точку

Задача

- Найти минимум функции методом пассивного поиска на интервале значений с шагом 0,5

$$y = x^2 - 5x$$

$$0 \leq x \leq 4$$

Решение

```
-->x=0:0.5:4;  
-->y=x.^2-5*x;  
-->[x' y']
```

0.	0.
0.5	- 2.25
1.	- 4.
1.5	- 5.25
2.	- 6.
2.5	- 6.25
3.	- 6.
3.5	- 5.25
4.	- 4.

$$\min(f(x)) = -6,26$$

$$x = 2,5$$

Погрешность

- Погрешность решения не превышает половины расстояния между точками

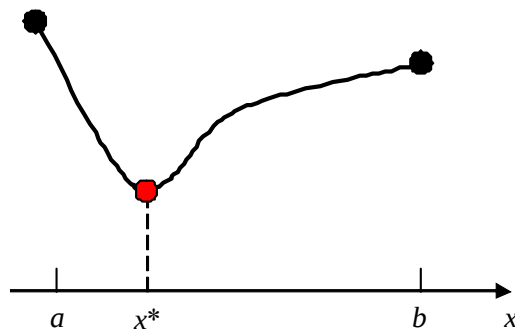
Метод половинного деления

Метод половинного деления

- Метод деления отрезка пополам
- Отрезок делят пополам и выбирают ту половину, где находится минимум

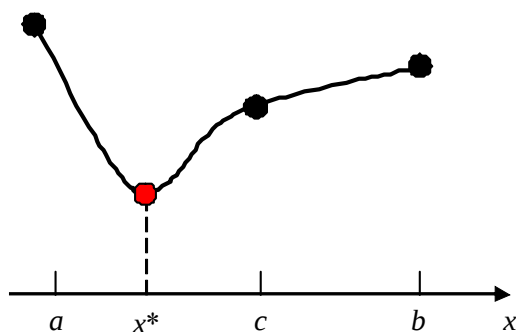
Унимодальная функция

- Один минимум или максимум
лат. *uni-*, *unus* (один) + *modus* (мера, манера, характер)



Расположение минимума

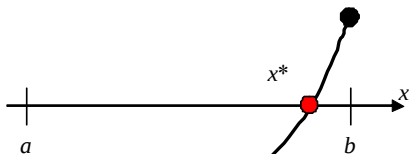
Минимум находится между точками А и В,
ЕСЛИ точка С ниже, чем точки А и В



Метод половинного деления: Аналогия

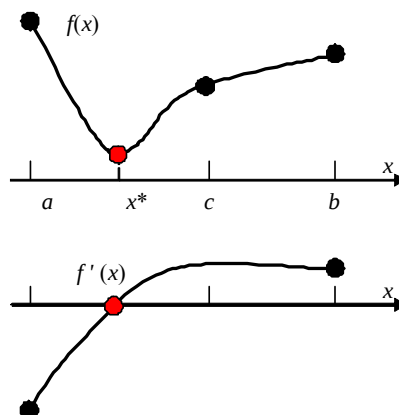
Решение уравнения $f(x) = 0$

Ноль находится между точками А и В, ЕСЛИ функция меняет знак



Оптимизация $f(x) \rightarrow 0$

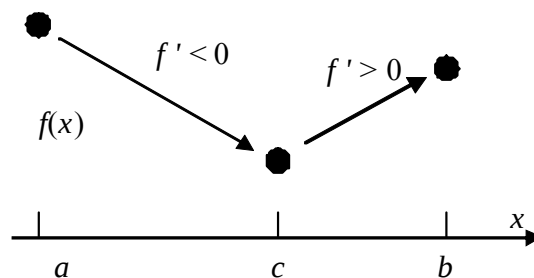
Минимум находится между точками А и В, ЕСЛИ производная меняет знак



Производная: Три точки

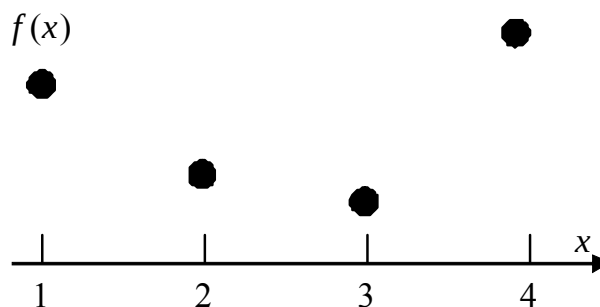
Знак производной: 2 точки

Изменение знака производной: 3 точки



Деление отрезка

- (1) Вычисляем значение функции в четырех точках
- (2) Выбираем отрезок, где производная меняет знак



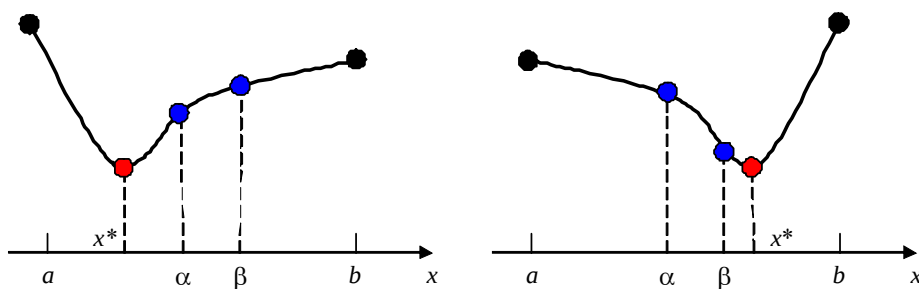
Текущий отрезок: [1 4]

Новый отрезок: [1 2 3] или [2 3 4]?

Деление отрезка

$$f(\alpha) \leq f(\beta) \Rightarrow x^* \in [a, \beta]$$

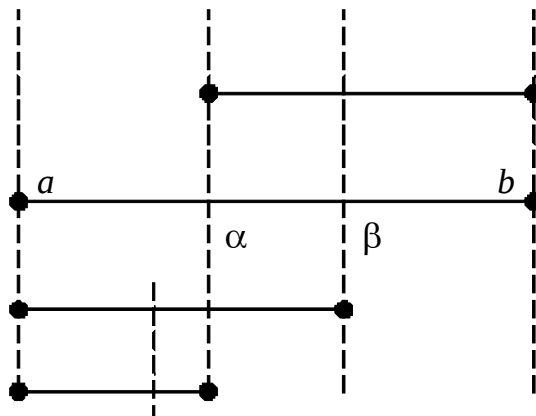
$$f(\alpha) \geq f(\beta) \Rightarrow x^* \in [\alpha, b]$$



Золотое сечение

Деление отрезка

Повторно использовать предыдущие значения

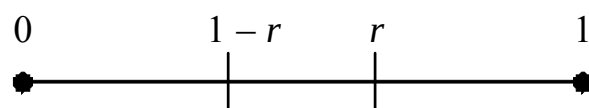


Золотое сечение

$$r = 0,618$$

$$1 - r = 0,382$$

Текущий интервал $[0; 1]$



$[a; b]$

$\alpha = ?$

$\beta = ?$

Новый интервал $[0; r]$



Задача

- Найти минимум функции методом золотого сечения на интервале значений:

– Таблица

– График

$$y = x^2 - 5x$$

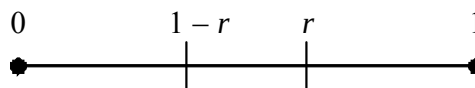
$$0 \leq x \leq 4$$

Золотое сечение

$$r = 0,618$$

$$1 - r = 0,382$$

Текущий интервал $[0; 1]$



$[a; b]$

$$\alpha = a + 0,618 (b-a)$$

$$\beta = a + 0,382 (b-a)$$

Новый интервал $[0; r]$



Решение

n	a	b	α	$f(\alpha)$	β	$f(\beta)$	Δ
0	0	4					
1							
2							

Погрешность метода

- Ошибка = длина отрезка
- С каждой итерацией уменьшается
- Убывает в геометрической прогрессии
- Знаменатель $r = 0,618$