

Методы Монте-Карло

Случайные числа

Методы Монте-Карло

- численные методы, основанные на использовании случайных чисел
 - Универсальный метод решения различных задач
- **Монте-Карло** (фр. Monte Carlo) – район княжества Монако: казино и курорт
 - **Казино** (casino) – игорное заведение, где результат игры зависит от случайности
 - ит., лат. *casa* – дом



Случайные числа

- Случайный – «непредсказуемый»
 - Точное значение числа неизвестно
 - Можно задать пределы значений и общие характеристики чисел
- Псевдо-случайные числа
 - Таблицы случайных чисел
 - Функции для языков программирования
 - Функции в пакетах программ

«Стандартный» генератор

- Псевдослучайные числа:
 - таблицы случайных чисел
 - готовые функции
- Равномерное распределение (UNIFORM)
 - Случайные числа равномерно распределены от 0 до 1

$$u \in [0;1]$$

$$x \in [a;b]$$

- Преобразование к нужному интервалу?

$$x = \dots u ?$$

Обычный метод интегрирования Монте-Карло

«Среднее значение»

Процедура

- Аналог метода прямоугольников
- Задаем N случайных чисел на интервале интегрирования
- Находим значение функции
- Вычисляем интеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Интеграл = Среднее

- Вычисление интеграла
- Площадь фигуры
- Среднее = высота прямоугольника такой же площади

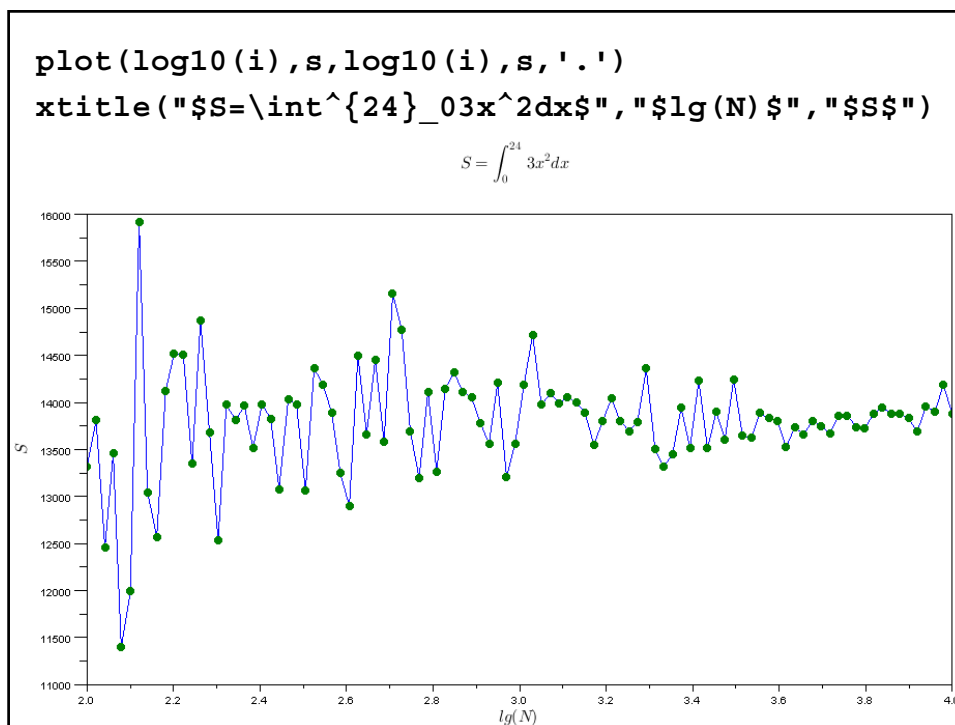
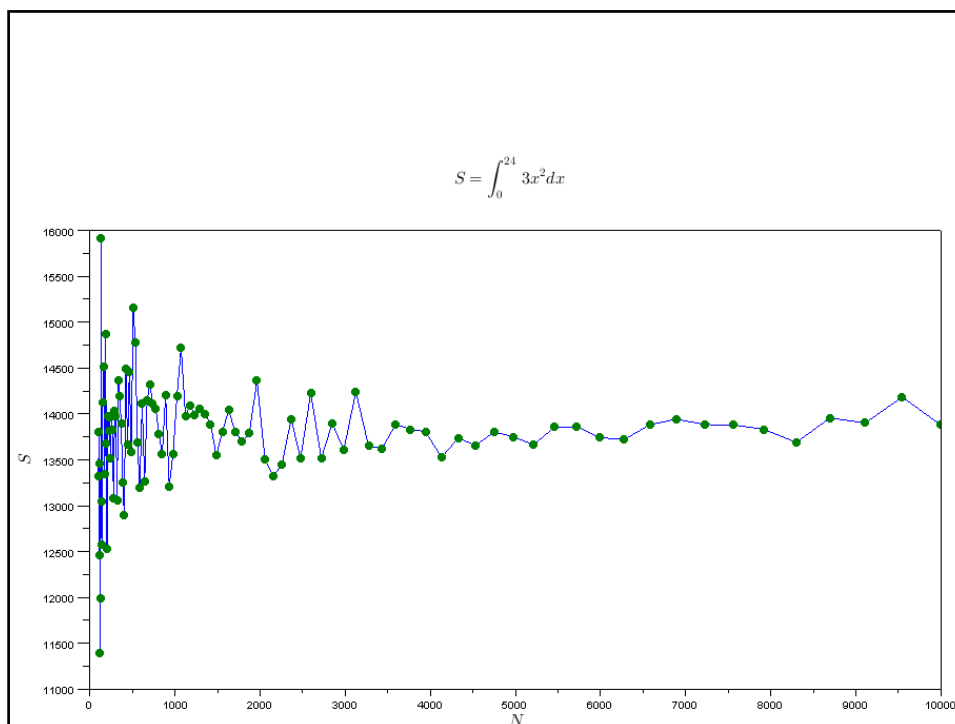
$$S = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{\sum_{i=1}^N f(x_i)}{N}$$

Задача

Найти значение интеграла численно:
обычным методом Монте-Карло
($n = 10$)

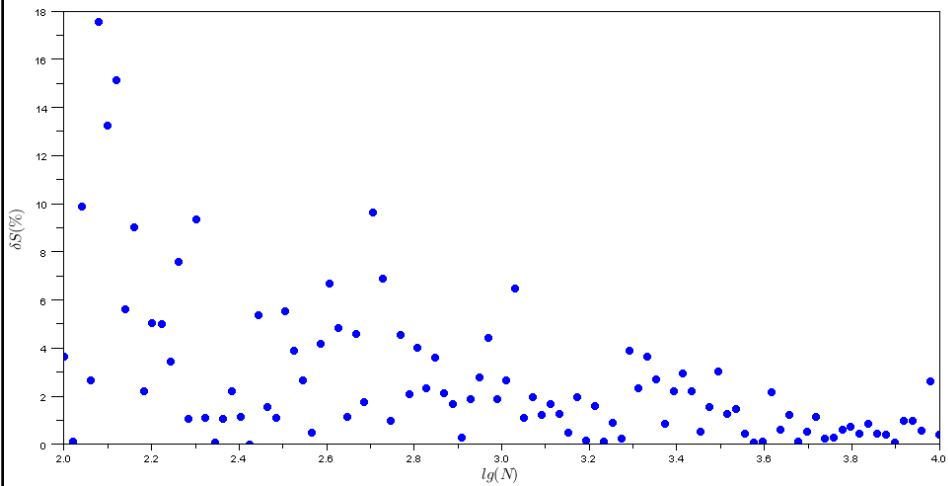
$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx$$

```
s=[];  
i=round(logspace(2,4,100));  
for n=1:length(i)  
x=rand(i(n),1,'uniform')*24;  
s(n)=24*sum(3*x.^2)/i(n);  
end  
plot(i,s,i,s,'.')  
xlabel('$S=\int^{24}_0 3x^2 dx$', '$N$',  
 '$S$')
```



```
plot(log10(i),abs(s-13824)/13824*100,'.')
xtitle("$S=\int^{24}_0 3x^2dx$", "$lg(N)$",
"$\delta S$ (%)")
```

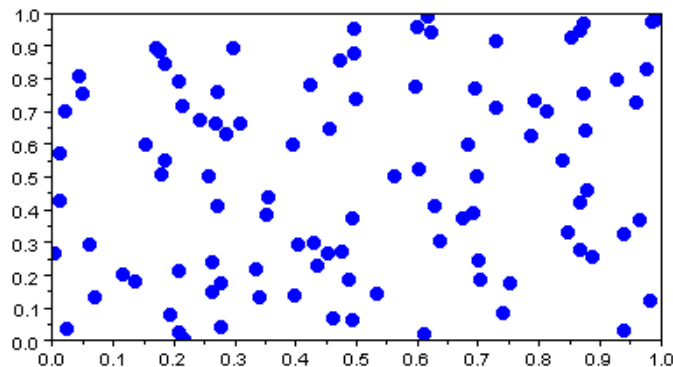
$$S = \int_0^{24} 3x^2 dx$$



Геометрический метод
интегрирования Монте-Карло
«Площадь фигуры»

Генератор SciLab

```
x=rand(100,1,'uniform');  
y=rand(100,1,'uniform');  
plot(x,y,".")
```



Интегрирование

- Определяем диапазон значений X и Y
- Генерируем N пар случайных чисел
- Заполняем прямоугольник случайными числами
- Подсчитываем долю точек ниже графика функции
- Вычисляем значение интеграла как долю площади прямоугольника

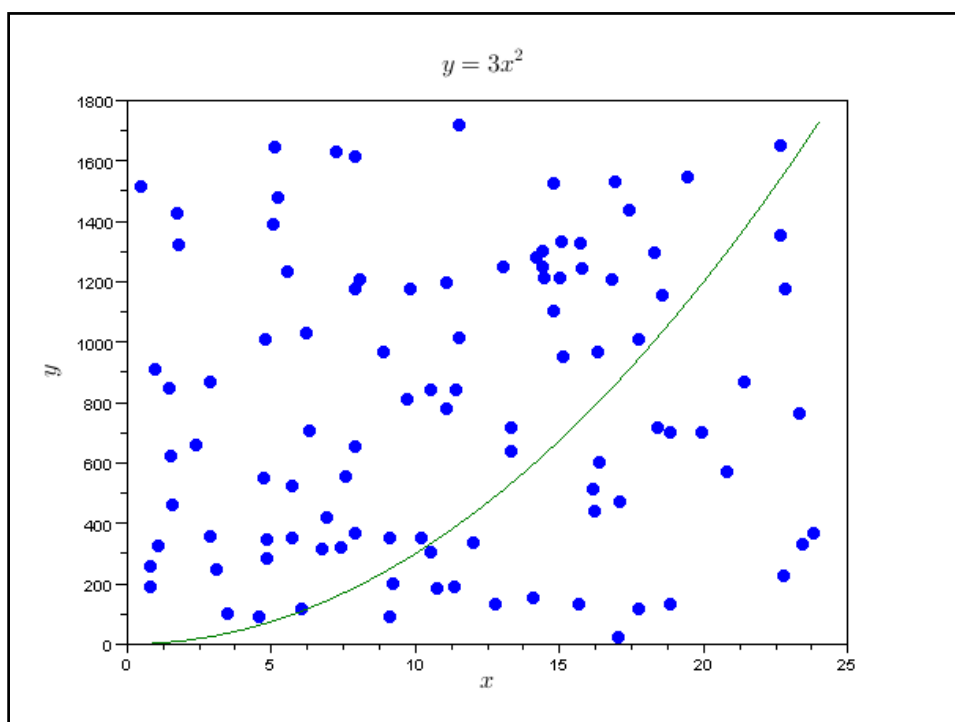
Задача

Найти значение интеграла численно:
графическим методом Монте-Карло
($n = 10$)

$$I = \int_0^{24} 3x^2 dx$$

SciLab

```
-->3*24^2
1728.
x=rand(100,1,'uniform')*24;
y=rand(100,1,'uniform')*1728;
x1=0:24;
y1=3*x1.^2;
plot(x,y,'.',x1,y1)
xtitle("$y=3x^2$", "$x$", "$y$")
```



Результаты вычислений

--> $S = 24 \cdot 1728 \cdot \text{sum}(y < 3 \cdot x.^2) / 100$

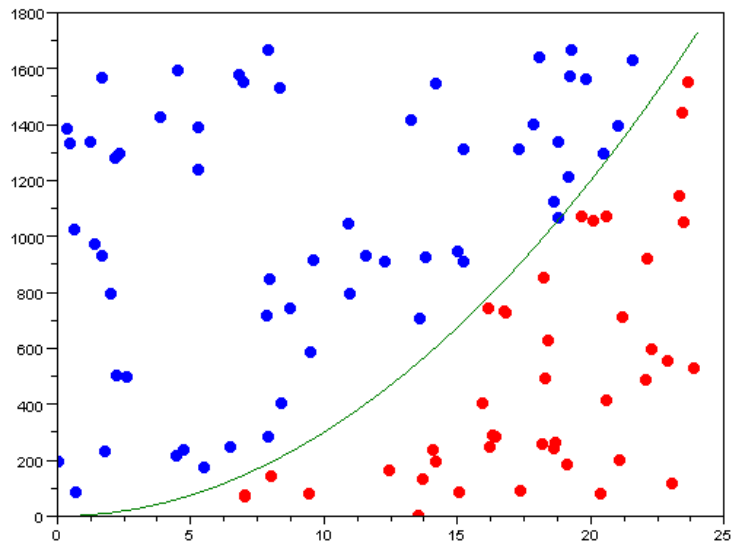
$S =$

11197.44

```

ii=find(y<3*x.^2)
plot(x,y,'.',x1,y1,x(ii),y(ii),'r')
xlabel("$y=3x^2$","$x$","$y$")

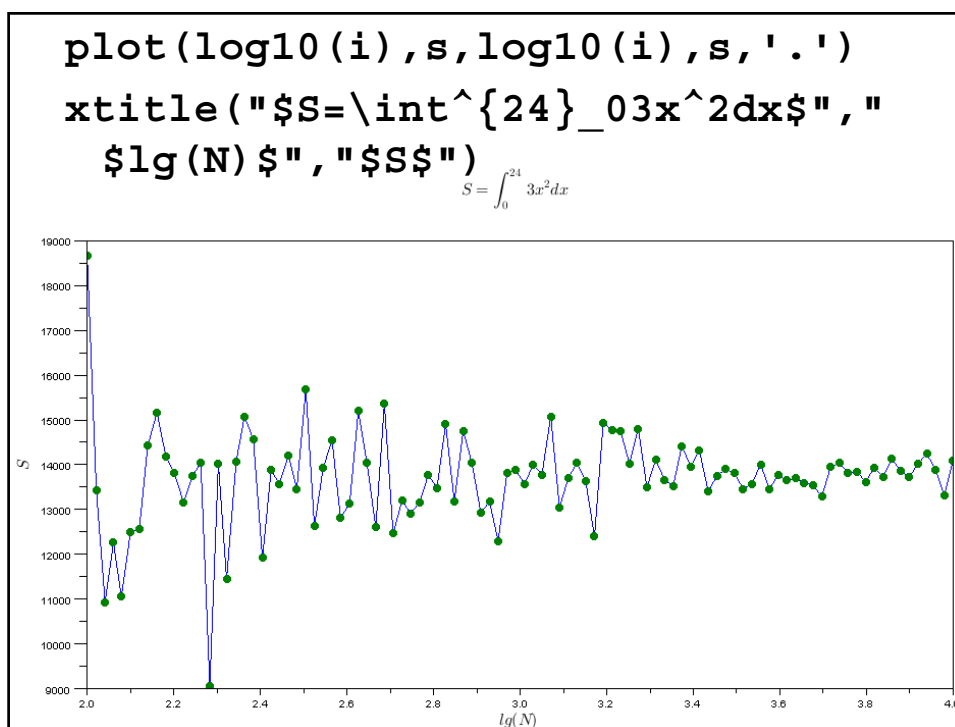
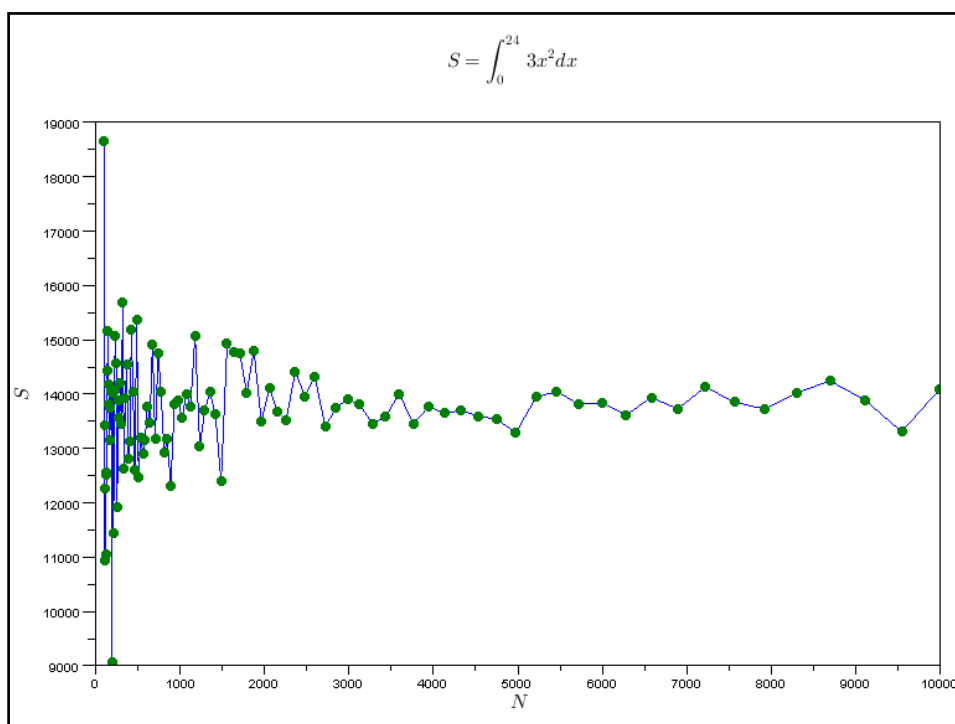
```



```

i=round(logspace(2,4,100));
for n=1:length(i)
x=rand(i(n),1,'uniform')*24;
y=rand(i(n),1,'uniform')*1728;
s(n)=24*1728*sum(y<3*x.^2)/i(n);
end
plot(i,s,i,s,'.')
xlabel("$S=\int^{24}_0 3x^2 dx$","$N$","$S$")

```



Применение

- Решение уравнений
- Оптимизация
- Интегрирование
- ...

Задача

- Оценка числа Пи геометрическим методом Монте-Карло
 - Площадь круга $S = \pi R^2$
 - Радиус $R = 1$
 - Круг вписан в квадрат
 - Сторона квадрата = ?
 - Четверть квадрата
 - 25 случайных точек – нанести на график
 - Проверка: $(x^2 + y^2) < 1$? отметить на графике
 - Доля точек внутри круга $\rightarrow$ Оценка числа Пи

Таблица случайных чисел

х	у	х	у
0,148190841	0,007610586	0,563521956	0,502219161
0,378226465	0,037036173	0,746230287	0,549091255
0,558350975	0,185424977	0,982166112	0,576009283
0,774723457	0,137856428	0,059097423	0,613703917
0,871360772	0,075377193	0,258762439	0,683859527
0,024827424	0,363904417	0,479747905	0,660798888
0,22521287	0,219824903	0,799699843	0,617688123
0,432134594	0,387027894	0,921933638	0,708203295
0,603254578	0,292236542	0,139505063	0,879983896
0,881414081	0,334318219	0,387939184	0,813269166
0,160597859	0,587339644	0,517393816	0,914771047
0,236212982	0,451732646	0,757746571	0,956340315
		0,822122846	0,998468016

Генераторы случайных чисел

SciLab

Excel

C++

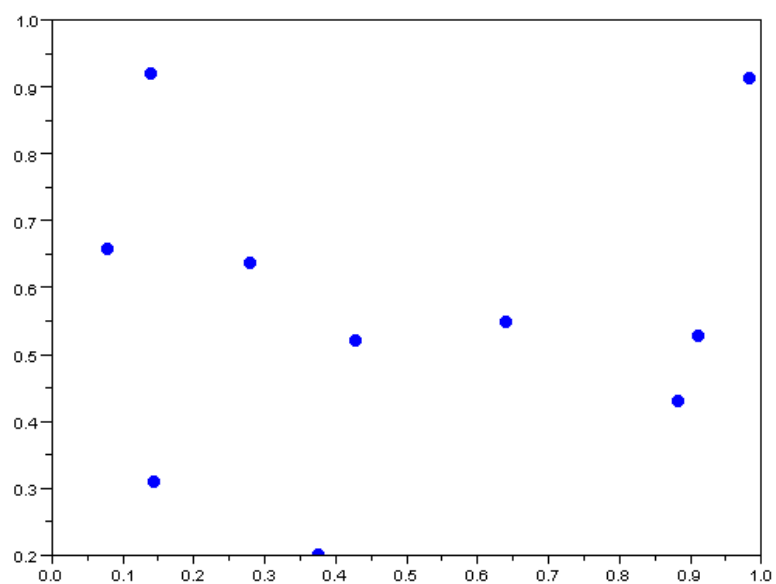
Генератор SciLab

Генератор SciLab

```
x=rand(10,2,'uniform')  
0.6398157    0.5488786  
0.9820604    0.9129437  
0.0773221    0.6581913  
0.1403697    0.9208622  
0.9105735    0.5269724  
0.4268442    0.5209295  
0.2801996    0.6379456  
0.1427442    0.3111599  
0.3750417    0.2022945  
0.8833012    0.4309419
```

```
plot(x(:,1),x(:,2),'.')

```



Генератор Excel

СЛЧИС()

Excel: СЛЧИС()

Справка MS Excel: СЛЧИС()

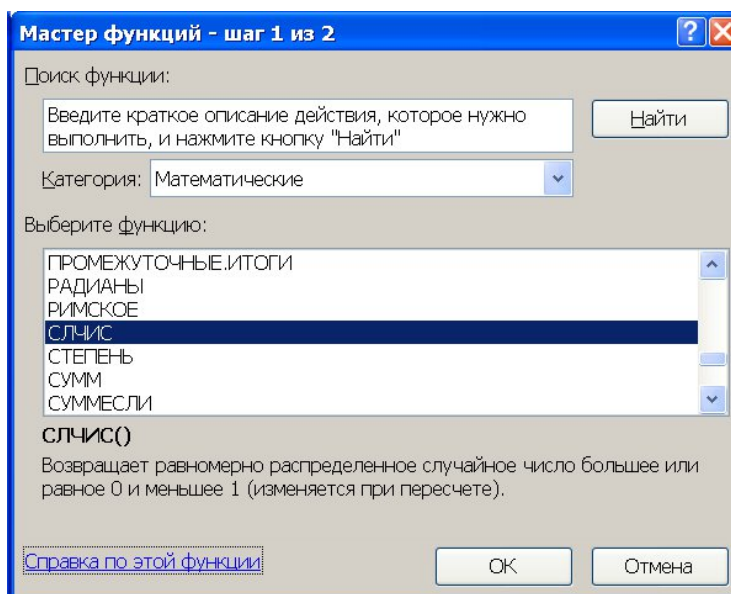
Возвращает равномерно распределенное случайное число, большее либо равное 0 и меньшее 1. Новое случайное число возвращается при каждом вычислении рабочего листа.

Чтобы получить случайное вещественное число между a и b, можно использовать следующую формулу: $\text{СЛЧИС()}*(b-a)+a$

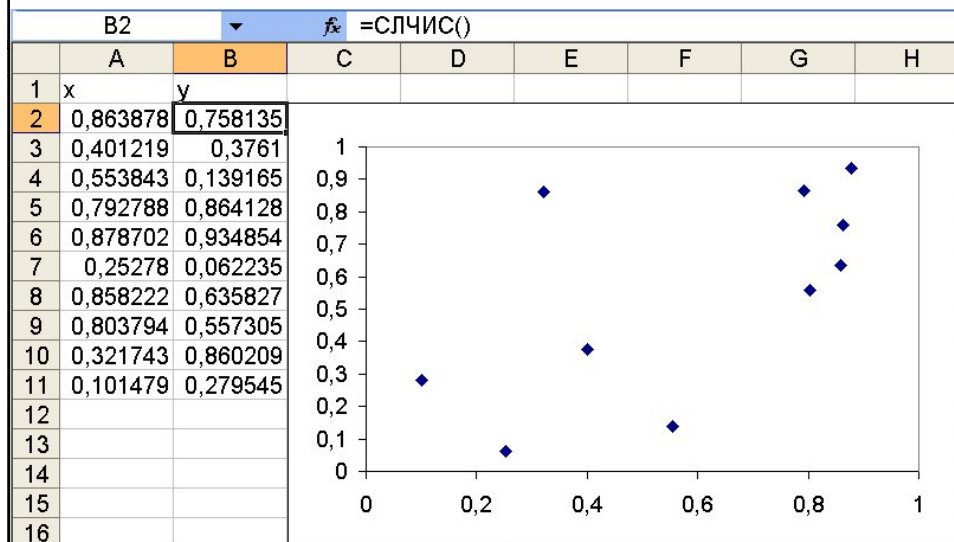
Если требуется использовать функцию СЛЧИС для генерации случайного числа, но изменение этого числа при каждом вычислении значения ячейки нежелательно, можно ввести в строку формул $=\text{СЛЧИС}()$, а затем нажать клавишу F9, чтобы заменить формулу на случайное число.

Чтобы переключиться между просмотром результатов и просмотром формул, возвращающих эти результаты, нажмите сочетание клавиш CTRL+' (апостроф) или в меню **Сервис** укажите на пункт **Зависимости формул** и выберите режим **Режим проверки формул**.

Excel



Генератор Excel: СЛЧИС()

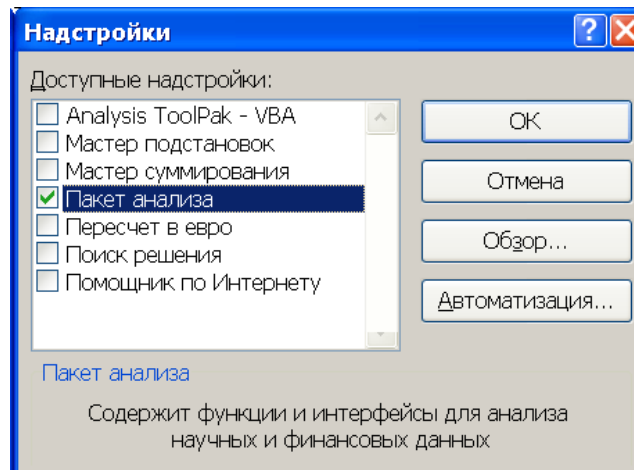


Генератор Excel

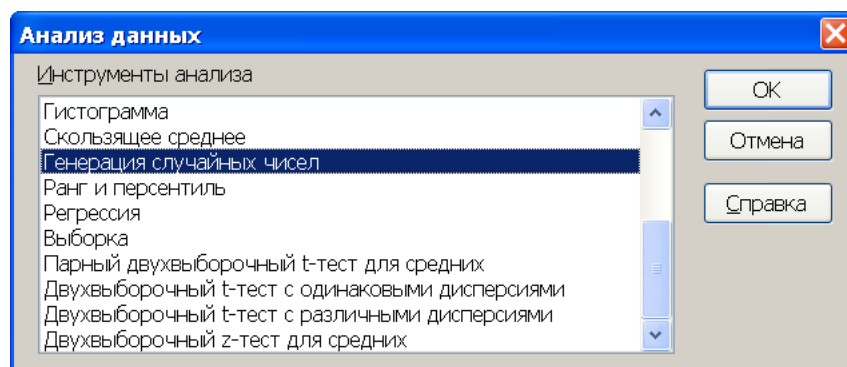
Надстройка
«Пакет анализа данных»

Excel: Пакет анализа

- Сервис ► Настройки



Сервис ► Анализ данных



Параметры генератора

Генерация случайных чисел

Число переменных:

Число случайных чисел:

Распределение:

Параметры

Между и

Случайное рассевание:

Параметры вывода

☒ Выходной интервал:

☐ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

Генерация случайных чисел

Число переменных – число столбцов

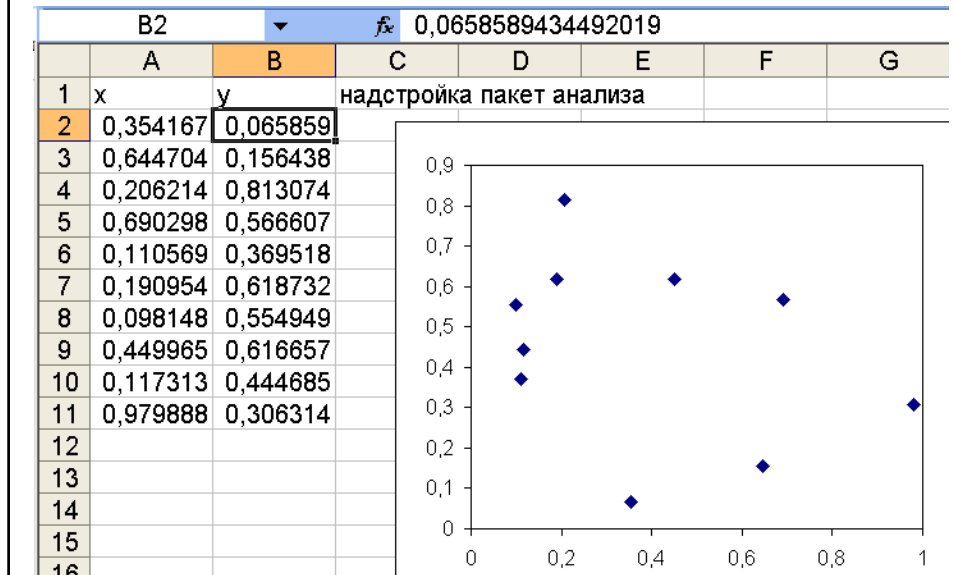
Число случайных чисел – число значений

Распределение – Равномерное – 0...1.

Случайное рассевание – начальный
параметр генератора

Выходной диапазон – ячейки для заполнения

Результаты Excel



Генератор Excel: Надстройка

- Сервис
- Анализ данных
- Генерация случайных чисел
- Параметр генератора (int)
-32765 ... 32768

Генерация случайных чисел

Число переменных:

Число случайных чисел:

Распределение:

Параметры:

Между и

Случайное рассейвание:

Параметры вывода:

☒ Выходной интервал:

☐ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

OK Отмена Справка

Генератор C++

Функция `rand()`

Генератор C++

`int rand()`

Генерация одного случайного числа (0 ... 32767).

`srand(seed)`

Задание начального состояния генератора `seed`.

При первом вызове `rand()` по умолчанию `seed=1`.

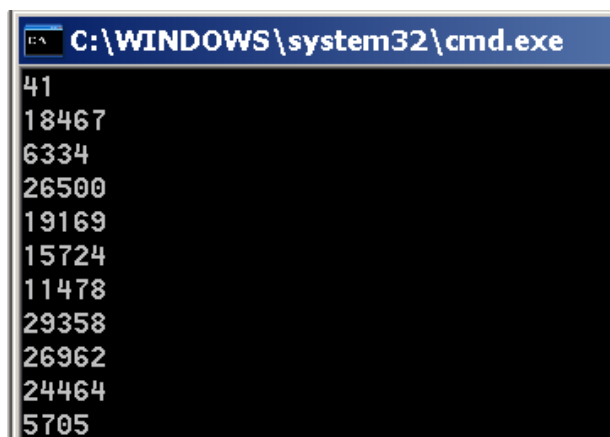
`stdlib.h`

Пример C++

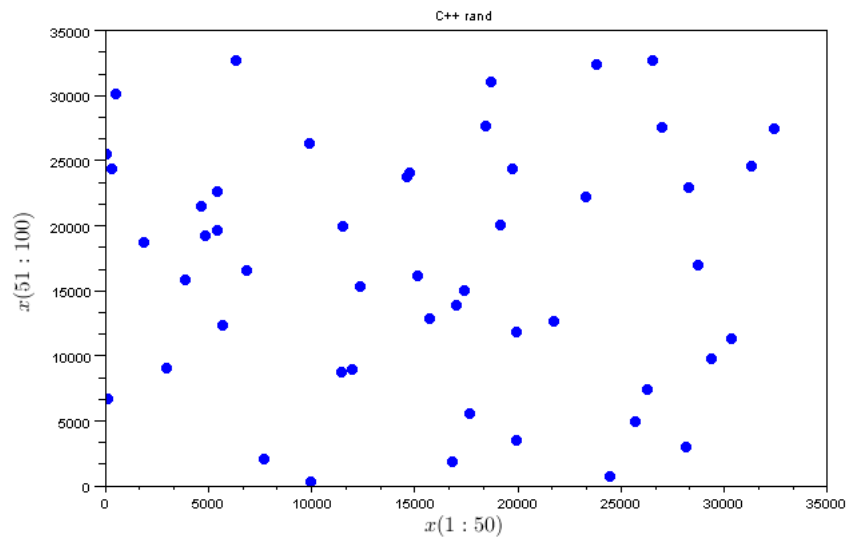
```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void main()
{
    int i;
    srand(1);
    for ( i = 0; i < 100 ; i++ )
    {
        printf("%d\n", rand());
    }
}
```

Случайная последовательность



```
x=read("rand1.txt",-1,1);
size(x)
plot(x(1:50),x(51:100),'.')
xtitle("C++ rand","$x(1:50)$","$x(51:100)$")
```



Генератор C++

Функция `rand_s`

Генератор C++

```
rand_s ( unsigned int* randomValue )
```

Генерация одного случайного числа (0 ... 4294967295).

Криптографическая защита ОС.

```
stdlib.h
```

Пример C++

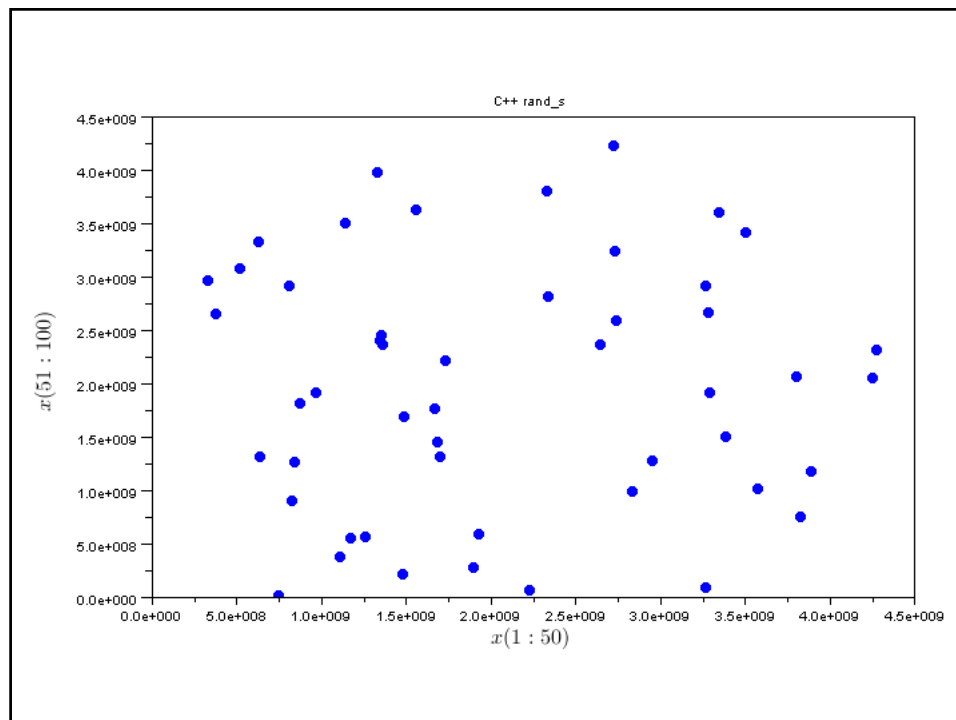
```
#define _CRT_RAND_S

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

void main()
{
    unsigned int n;
    for ( int i = 0; i < 100 ; i++ )
    {
        rand_s ( &n );
        printf("%u\n", n);
    }
}
```

Случайная последовательность

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
2330045608
2601388300
1507957361
2372946814
561444206
996674606
2827612285
2057912843
224387168
604459297
26447914
```



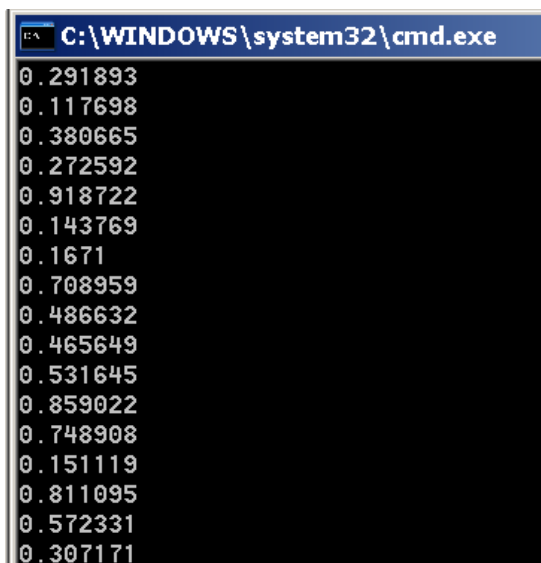
Пример C++

```
#define _CRT_RAND_S

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

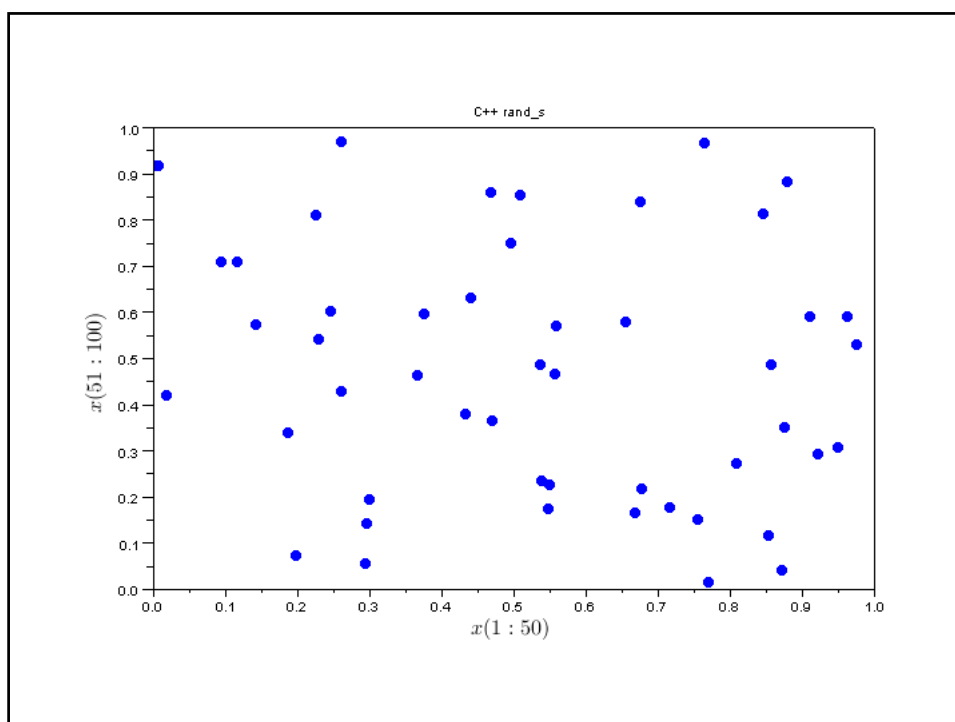
void main()
{
    unsigned int n;
    for ( int i = 0; i < 100 ; i++ )
    {
        rand_s ( &n );
        printf( "%g\n", (double) n / ( (double) UINT_MAX ) );
    }
}
```

Случайная последовательность



C:\WINDOWS\system32\cmd.exe

0.291893
0.117698
0.380665
0.272592
0.918722
0.143769
0.1671
0.708959
0.486632
0.465649
0.531645
0.859022
0.748908
0.151119
0.811095
0.572331
0.307171



Качество генератора

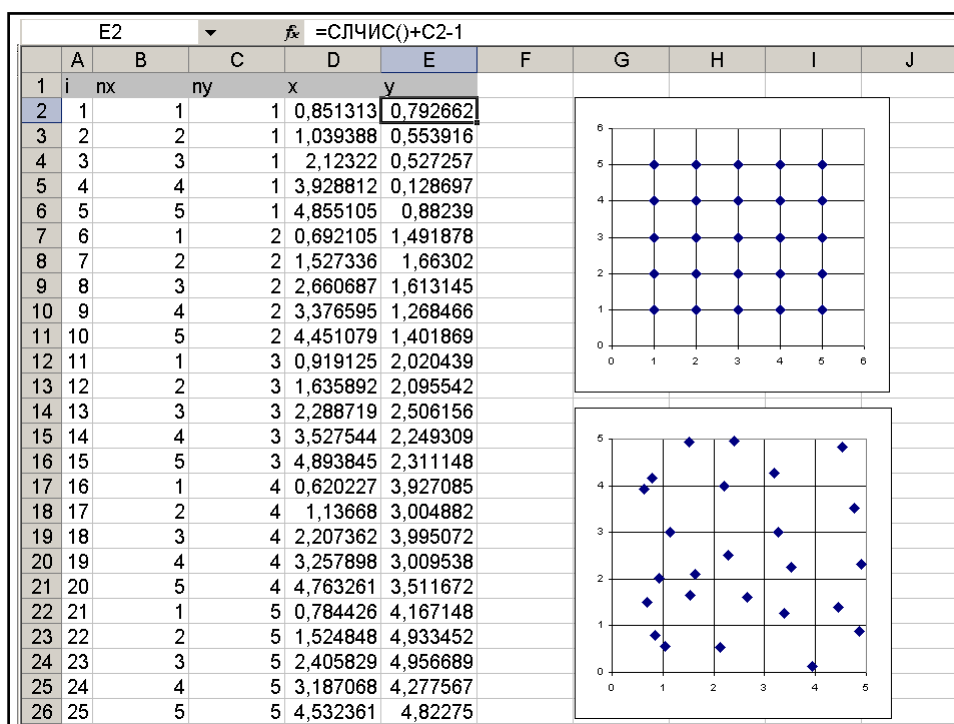
Качество случайных чисел

- Общие требования к генератору
 - Случайное значение
 - Равномерное покрытие площади
- Улучшение генератора
 - Псевдо-случайные числа
 - Квази-случайные числа
 - Латинский квадрат
 - ...

Пример

- Равномерное заполнение «сетки»
 - Номер числа $\rightarrow$ Индексы по X и Y
- Генерация внутри «клетки»
 - Случайные числа в каждой «клетке»

i	N _x	N _y	X				Y			
1	1	1	0	...	1	0	...	1		
2	2	1	1	...	2	0	...	1		
...										



	A	B	C	D	E
1	i	nx	ny	x	y
2	1	=ОСТАТ(A2-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A2-1)/5)+1=СЛЧИС()+B2-1	=СЛЧИС()+C2-1	
3	2	=ОСТАТ(A3-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A3-1)/5)+1=СЛЧИС()+B3-1	=СЛЧИС()+C3-1	
4	3	=ОСТАТ(A4-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A4-1)/5)+1=СЛЧИС()+B4-1	=СЛЧИС()+C4-1	
5	4	=ОСТАТ(A5-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A5-1)/5)+1=СЛЧИС()+B5-1	=СЛЧИС()+C5-1	
6	5	=ОСТАТ(A6-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A6-1)/5)+1=СЛЧИС()+B6-1	=СЛЧИС()+C6-1	
7	6	=ОСТАТ(A7-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A7-1)/5)+1=СЛЧИС()+B7-1	=СЛЧИС()+C7-1	
8	7	=ОСТАТ(A8-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A8-1)/5)+1=СЛЧИС()+B8-1	=СЛЧИС()+C8-1	
9	8	=ОСТАТ(A9-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A9-1)/5)+1=СЛЧИС()+B9-1	=СЛЧИС()+C9-1	
10	9	=ОСТАТ(A10-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A10-1)/5)+1=СЛЧИС()+B10-1	=СЛЧИС()+C10-1	
11	10	=ОСТАТ(A11-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A11-1)/5)+1=СЛЧИС()+B11-1	=СЛЧИС()+C11-1	
12	11	=ОСТАТ(A12-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A12-1)/5)+1=СЛЧИС()+B12-1	=СЛЧИС()+C12-1	
13	12	=ОСТАТ(A13-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A13-1)/5)+1=СЛЧИС()+B13-1	=СЛЧИС()+C13-1	
14	13	=ОСТАТ(A14-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A14-1)/5)+1=СЛЧИС()+B14-1	=СЛЧИС()+C14-1	
15	14	=ОСТАТ(A15-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A15-1)/5)+1=СЛЧИС()+B15-1	=СЛЧИС()+C15-1	
16	15	=ОСТАТ(A16-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A16-1)/5)+1=СЛЧИС()+B16-1	=СЛЧИС()+C16-1	
17	16	=ОСТАТ(A17-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A17-1)/5)+1=СЛЧИС()+B17-1	=СЛЧИС()+C17-1	
18	17	=ОСТАТ(A18-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A18-1)/5)+1=СЛЧИС()+B18-1	=СЛЧИС()+C18-1	
19	18	=ОСТАТ(A19-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A19-1)/5)+1=СЛЧИС()+B19-1	=СЛЧИС()+C19-1	
20	19	=ОСТАТ(A20-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A20-1)/5)+1=СЛЧИС()+B20-1	=СЛЧИС()+C20-1	
21	20	=ОСТАТ(A21-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A21-1)/5)+1=СЛЧИС()+B21-1	=СЛЧИС()+C21-1	
22	21	=ОСТАТ(A22-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A22-1)/5)+1=СЛЧИС()+B22-1	=СЛЧИС()+C22-1	
23	22	=ОСТАТ(A23-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A23-1)/5)+1=СЛЧИС()+B23-1	=СЛЧИС()+C23-1	
24	23	=ОСТАТ(A24-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A24-1)/5)+1=СЛЧИС()+B24-1	=СЛЧИС()+C24-1	
25	24	=ОСТАТ(A25-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A25-1)/5)+1=СЛЧИС()+B25-1	=СЛЧИС()+C25-1	
26	25	=ОСТАТ(A26-1;5)+1	=ЦЕЛОЕ((A26-1)/5)+1=СЛЧИС()+B26-1	=СЛЧИС()+C26-1	

Выводы

- Случайные числа вместо сложных алгоритмов
- Сходимость с увеличением количества чисел
- Размерность возрастает не так быстро, как в классических численных методах
- Хорошая возможность распараллеливания
- Результат зависит от качества генератора случайных чисел