

Министерство образования и науки
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный технический университет
Кафедра автоматизированных систем управления

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Уфа 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ	5
2. ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ	5
3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	8
4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ.....	9
5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	11
6. ОПТИМИЗАЦИЯ.....	12
7. МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО	13
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	15

ВВЕДЕНИЕ

Решение предлагаемых задач позволяет закрепить понимание лекционного материала по основам Дисциплина «...» базируется на материале следующих предметов: «Математика», «...» и «....». Перед решением задач рекомендуется повторить соответствующий теоретический материал.

Чтобы полностью *понять и освоить* методику ..., вычисления производятся с помощью калькулятора, а графики строятся вручную. Такое понимание потребуется в дальнейшем для осознанного использования компьютера.

Для представления результатов вычислений следует выбрать *число значащих разрядов*. При выборе разрядности представления учитывают следующее:

- качество исходных данных;
- возможную погрешность вычислений;
- приемлемую погрешность решения задачи.

Условные обозначения. Клетки таблиц, подлежащие заполнению в процессе решения задач, отмечены вопросительным знаком. Ячейки, содержащие прочерк, заполнению не подлежат.

Можно добавить из первой лекции

1. ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ

Цель занятия

Ознакомиться с различием между аналитическими и численными методами. Освоить вычисление «золотого сечения».

Задача 1.1

Вычислите квадратный корень методом половинного деления:

- а) 2
- б) 3
- в) 5
- г) 6
- д) 7
- е) 8
- ж) 10

Задача 1.2

Выпишите первые 30 чисел ряда Фибоначчи. Вычислите отношение соседних чисел ряда.

Задача 1.3

Вычислите значение «золотого сечения» с точностью до 6 значащих цифр, используя аналитическое решение.

2. ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Цель занятия

Ознакомиться с источниками погрешностей ручных и машинных вычислений.

Задача 2.1

Проведите вычисления над десятичными числами с переводом из представления с плавающей точкой в представление с фиксированной точкой и обратно в представление с плавающей точкой с 4 значащими разрядами и определите погрешность:

- а) $1,223 \times 10^{-1} + 3,201 \times 10^{-2}$
- б) $3,224 \times 10^{-1} - 0,5011 \times 10^2$
- в) $0,0502 \times 10^{-3} + 1,604 \times 10^{-1}$
- г) $1,676 \times 10^{-5} + 3,234 \times 10^{-7}$

- д) $7,245E2 + 1,278E-2$
- е) $8,445E1 - 7,278E4$
- ж) $10,14E-3 - 1,267E-6$

Задача 2.2

Проверьте выполнение свойств коммутативности, дистрибутивности и ассоциативности при вычислениях над десятичными числами с сохранением 4 значащих разрядов мантиисы:

- а) $0,2345E-1 + 2,345E-4 + 43,23E-8$
- б) $0,2345E-1 \times (2,345E-4 + 43,23E-8)$
- в) $(0,2345E-1 \times 2,345E-4) / 43,23E-8$
- г) $0,2345E-1 + 2,345E-6 + 43,23E-7$
- д) $(0,2354E-3 - 2,345E-4) / 43,23E-6$
- е) $2,378E-3 - 3,596E-8 - 4,923E-8$
- ж) $3,845E5 + 4,435E2 + 7,433E-1$

Задача 2.3

Переведите двоичные числа в десятичное представление:

- а) 11_2
- б) 101_2
- в) 111_2
- г) 100_2
- д) 1100_2
- е) 1010_2
- ж) 1011_2

Задача 2.4

Переведите двоичные числа (в представлении с плавающей точкой) в десятичное представление:

- а) $0,11_2 \times 2^{-1}$
- б) $1,1_2 \times 2^{-1}$
- в) $0,101_2 \times 2^{-3}$
- г) $1,01_2 \times 2^3$
- д) $0,111_2 \times 2^2$
- е) $0,1011_2 \times 2^{-2}$
- ж) $11,11_2 \times 2^{-4}$

Задача 2.5

Проведите вычисления над двоичными числами с плавающей точкой с 4 значащими разрядами:

- а) $0,101_2 \times 2^{-1} + 0,11_2 \times 2^{-3}$
- б) $1,01_2 \times 2^{-1} + 0,111_2 \times 2^{-2}$
- в) $0,101_2 \times 2^{-3} + 0,11_2 \times 2^{-1}$
- г) $1,01_2 \times 2^3 + 0,11_2 \times 2^{-1}$
- д) $0,111_2 \times 2^2 + 0,11_2 \times 2^{-1}$
- е) $0,1011_2 \times 2^{-2} + 1,1_2 \times 2^{-1}$
- ж) $11,11_2 \times 2^{-4} + 0,11_2 \times 2^{-1}$

Задача 2.6

Переведите десятичные числа в двоичное представление с плавающей точкой с 4 значащими разрядами:

- а) 1,2
- б) 3,2
- в) 0,05
- г) 1,6
- д) 7,2
- е) 8,4
- ж) 10,1

Задача 2.7

Проведите вычисления с переводом в двоичное представление с плавающей точкой с 4 значащими разрядами и определите погрешность:

- а) $1,2 + 3,2$
- б) $3,2 - 0,05$
- в) $0,05 + 1,6$
- г) $1,6 + 3,2$
- д) $7,2 + 1,2$
- е) $8,4 - 7,2$
- ж) $10,1 - 1,2$

Задача 2.8

Найдите число значащих десятичных разрядов для следующего количества двоичных разрядов мантииссы:

- а) 8
- б) 16

- в) 32
- г) 24
- д) 53
- е) 113

3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель занятия

Освоить численные методы решения нелинейных уравнений.

Задача 3.1

Проверьте, существует ли решение уравнения

$$f(x) = 0$$

на интервале $x \in [a; b]$, см табл.3.1. При необходимости уточните границы интервала поиска решения.

Т а б л и ц а 3.1

Нелинейные уравнения

Вариант	Уравнение	a	b
а	$2x^2 - 8x + 6 = 0$	0	4
б	$2x^2 - 8x + 6 = 0$	2	5
в	$3x^2 + 3x - 6 = 0$	0	4
г	$3x^2 + 3x - 6 = 0$	2	5
д	$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$	0	4
е	$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$	3	7
ж	$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$	-2	3

Задача 3.2

Методом деления отрезка пополам найдите решение нелинейного уравнения (табл. 3.1) на интервале, определенном в задаче 3.1.

Задача 3.3

Сравните приближенное решение задачи 3.2 с точным аналитическим решением.

4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ

Цель занятия

Ознакомиться с численными методами линейной и полиномиальной интерполяции и экстраполяции.

Задача 4.1

Вычислите $y(x)$ с помощью линейной интерполяции (экстраполяции). Нанесите на график узловые точки, прямую линию и результат интерполяции.

Т а б л и ц а 4.1

Узловые точки для линейной интерполяции

Вариант	Узловые точки		Искомая точка
	1	2	
а	$f(10) = 20$	$f(15) = 35$	$f(12) = ?$
б	$f(10) = 1$	$f(15) = 5$	$f(13) = ?$
в	$f(10) = 7$	$f(15) = 2$	$f(14) = ?$
г	$f(10) = -2$	$f(15) = 4$	$f(16) = ?$
д	$f(10) = 12$	$f(15) = 18$	$f(5) = ?$
е	$f(10) = 4$	$f(15) = 1$	$f(11) = ?$
ж	$f(10) = 0$	$f(15) = -8$	$f(25) = ?$

Задача 4.2

Вычислите значение $f(x_1; x_2)$ по данным табл.4.2 с помощью билинейной интерполяции двумя способами:

(1) интерполяция по x_1 , затем по x_2 ;

(2) интерполяция по x_2 , затем по x_1 .

Сравните полученные результаты.

Т а б л и ц а 4.2

Узловые точки для билинейной интерполяции

Вариант	Узловые точки				Искомая точка
	1	2	3	4	
а	$f(12; 28)=10$	$f(12; 32)=15$	$f(23; 28)=21$	$f(23; 32)=12$	$f(18; 29)=?$
б	$f(10; 20)=10$	$f(10; 35)=15$	$f(25; 20)=21$	$f(25; 35)=12$	$f(19; 31)=?$
в	$f(14; 12)=10$	$f(14; 23)=15$	$f(23; 12)=21$	$f(23; 23)=9$	$f(21; 15)=?$
г	$f(10; 80)=10$	$f(10; 92)=15$	$f(23; 80)=21$	$f(23; 92)=12$	$f(20; 83)=?$
д	$f(21; 25)=10$	$f(21; 37)=15$	$f(28; 25)=21$	$f(28; 37)=12$	$f(22; 32)=?$
е	$f(2; 8)=10$	$f(2; 13)=15$	$f(5; 8)=21$	$f(5; 13)=12$	$f(4; 10)=?$
ж	$f(12; 42)=10$	$f(12; 56)=15$	$f(26; 42)=21$	$f(26; 56)=12$	$f(22; 49)=?$

Задача 4.3

Вычислите значение $f(x)$ по данным табл.4.3 с помощью интерполяции параболой. Постройте график.

Т а б л и ц а 4.3

Узловые точки для интерполяции параболой

Вариант	Узловые точки			Искомая точка
	1	2	3	
а	$f(10)=10$	$f(12)=15$	$f(21)=31$	$f(18)=?$
б	$f(12)=11$	$f(17)=17$	$f(22)=20$	$f(14)=?$
в	$f(10)=9$	$f(18)=19$	$f(21)=25$	$f(15)=?$
г	$f(12)=12$	$f(16)=21$	$f(22)=35$	$f(19)=?$
д	$f(10)=13$	$f(13)=17$	$f(25)=41$	$f(21)=?$
е	$f(12)=14$	$f(14)=18$	$f(27)=25$	$f(22)=?$
ж	$f(15)=10$	$f(19)=19$	$f(26)=26$	$f(20)=?$

Задача 4.4

Постройте линейное уравнение для аппроксимации данных табл. 4.4. Вычислите значение функции. Постройте график.

Т а б л и ц а 4.4

Узловые точки для линейной аппроксимации

Вариант	Узловые точки				Искомая точка
	1	2	3	4	
а	$f(5) = 26$	$f(10) = 48$	$f(15) = 54$	$f(20) = 87$	$f(18) = ?$
б	$f(10) = 35$	$f(20) = 64$	$f(30) = 135$	$f(40) = 157$	$f(33) = ?$
в	$f(5) = 0$	$f(15) = -66$	$f(25) = -93$	$f(35) = -178$	$f(19) = ?$
г	$f(12) = 41$	$f(14) = 58$	$f(16) = 62$	$f(18) = 73$	$f(15) = ?$
д	$f(10) = 4$	$f(15) = 12$	$f(20) = -3$	$f(25) = -57$	$f(21) = ?$
е	$f(10) = 38$	$f(12) = 54$	$f(14) = 60$	$f(16) = 68$	$f(15) = ?$
ж	$f(25) = 122$	$f(30) = 158$	$f(35) = 151$	$f(40) = 231$	$f(34) = ?$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Цель занятия

Освоить численные методы нахождения значения определенного интеграла.

Задача 5.1

Вычислите значение определенного интеграла (табл. 5.1) аналитически.

Задача 5.2

Вычислите значение определенного интеграла (табл. 5.1) методом прямоугольников. Сравните результаты с аналитическим решением.

Определенные интегралы

Вариант	Интеграл
а	$\int_3^8 (2x^2 + 3) dx$
б	$\int_4^9 (2x - 7) dx$
в	$\int_2^6 (3x^2 + 2x) dx$
г	$\int_0^{10} (x^2 - x + 3) dx$
д	$\int_{10}^{20} (x^2 - x - 5) dx$
е	$\int_3^5 (2x^3 - 4) dx$
ж	$\int_5^{10} (4x^2 + 2x - 6) dx$

Задача 5.3

Вычислите значение определенного интеграла (табл. 5.1) методом трапеций. Сравните результаты с аналитическим решением.

6. ОПТИМИЗАЦИЯ**Цель занятия**

Ознакомиться с численными методами поиска минимума/максимума функций.

Задача 6.1

Найдите минимум функции (табл. 6.1) аналитическим методом.

Задача 6.2

Найдите минимум функции (табл. 6.1) методом золотого сечения на указанном интервале значений.

Т а б л и ц а 6.1

Варианты функций для оптимизации

Вариант	Функция	Интервал поиска
а	$y = 2x^2 + 5x + 3$	$[-5; +2]$
б	$y = 2x^3 - 3x + 3$	$[-2; +5]$
в	$y = 3x^2 + 2x$	$[-2; +5]$
г	$y = x^2 - x + 3$	$[-2; +5]$
д	$y = x^2 - x - 5$	$[-2; +5]$
е	$y = 2x^3 - 4$	$[-2; +5]$
ж	$y = 4x^2 + 2x - 6$	$[-2; +5]$

Задача 6.3

Найдите минимум функции (табл. 6.1) методом пассивного поиска (полного перебора) на указанном интервале значений.

7. МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО

Цель занятия

Изучить численные методы, основанные на использовании случайных чисел.

Задача 7.1

Найдите решение нелинейного уравнения (табл. 3.1) методом Монте-Карло. Сравните результаты с решениями задач 3.2 и 3.3

Задача 7.2

Постройте линейное уравнение для аппроксимации данных табл. 4.4 методом Монте-Карло. Вычислите значение функции. Постройте график. Сравните результаты с решением задачи 4.4.

Задача 7.3

Найдите значение определенного интеграла (табл. 5.1) обычным методом Монте-Карло. Сравните результаты с решением задачи 5.1.

Задача 7.4

Найдите значение определенного интеграла (табл. 5.1) геометрическим методом Монте-Карло. Сравните результаты с решением задачи 5.1.

Задача 7.5

Найдите значение числа Π геометрическим методом Монте-Карло. Сравните результаты с известным теоретическим значением.

Задача 7.6

Найдите минимум функции (табл. 6.1) методом Монте-Карло. Сравните результаты с решениями задач 6.1–6.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Вычислительные методы для инженеров
 2. Вержбицкий Основы численных методов
 3. Боглаев Вычислительная математика и программирование
 4. Демидович Основы вычислительной математики
 5. Воеводин Параллельные вычисления
 6. Кнут Искусство программирования
 7. Алексеев Scilab: Решение инженерных и математических задач (<http://www.altlinux.org/Books:Scilab>)
 8. Press Numerical Recipes (<http://nr.com>)
 9. Мэтьюз Численные методы. Использование Matlab
- Дать полные ссылки по ГОСТу

Составители: АРЬКОВ Валентин Юльевич
АБДУЛНАГИМОВ Ансаф Ирекович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16
Бумага оберточная. Печать плоская. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 1,9
Усл. кр.-отт. 1,9. Уч.-изд.л. 1,8.
Тираж 100 экз. Заказ №
Уфимский государственный авиационный технический университет
Редакционно-издательский комплекс УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса, 12